Segédanyag a kimutatható eltérések nagyságának számításához

Kemény S., Deák A., Lakné Komka K., Kunovszki P.:
Kísérletek tervezése és értékelése – Kiegészítő kötet alapján

15.2. A másodfajú hiba valószínűsége, a kimutatható eltérés nagysága rögzített hatásokra

A varianciaanalízisnél az adatok alapján döntést hozunk a H_0 nullhipotézisről, vagyis arról, hogy a faktornak van-e hatása. Ha a nullhipotézist elutasítjuk, vagyis azt mondjuk, hogy a faktornak van hatása, előfordulhat, hogy tévedünk, és csak a véletlen ingadozás okozta, hogy az egyes csoportokra különböző átlagok adódtak, ennek valószínűsége α.

Ha a nullhipotézist elfogadjuk, azt mondjuk ki, hogy a faktor hatása a véletlen ingadozáshoz képest nem jelentős. Ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy nincs is hatás. Ha nagy az ingadozás (szórás), az F_0 próbastatisztika nevezőjében s_R^2 értéke nagy, így nagy hatások sem vehetők észre. A másodfajú hiba β valószínűsége annak valószínűsége, hogy a nullhipotézist elfogadjuk, pedig nem igaz, vagyis hogy a hatást nem vesszük észre, pedig a valóságban van.

Kíváncsiak lehetünk arra, hogy egy döntésnél mekkora a másodfajú hiba β valószínűsége. Kérdezhetjük azt is, hogy a nullhipotézistől való mekkora eltérést (mekkora hatást) mutathatnánk ki az adott tervben.

15.2.1. Egy rögzített faktor szerinti osztályozás

A nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha $F_0 < F_\alpha$. A másodfajú hiba β valószínűsége:

$$\beta = P\left(F_0 < F_\alpha \middle| \mathrm{H}_1\right). \tag{15.1}$$

Adott H_1 ellenhipotézishez, vagyis adott nagyságú feltételezett hatáshoz β értéke kiszámítható. A β értékének kiszámításához azt kell tudnunk, hogy amennyiben a H_1 ellenhipotézis igaz, F_0 milyen valószínűséggel vesz föl különböző értékeket, vagyis F_0 eloszlását kell ismernünk H_1 érvényessége esetén.

A hatások szignifikanciájának vizsgálatára szolgáló F-próba azon alapul, hogy F_0 F-eloszlású, ha H_0 igaz. Ehhez úgy jutottunk, hogy a $\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - Y_i\right)^2$ négyzetösszeg fölbontásával a 9.3. alfejezetben[1] bizonyítottuk, hogy a $\sum_i p_i\left(y_{i\cdot} - y_{\cdot\cdot} - \alpha_i\right)^2$ négyzetösszeg $\chi^2\sigma_e^2$ eloszlású, $\nu_A = r - 1$ szabadsági fokkal. Ha mindegyik $\alpha_i = 0$, vagyis nincs különbség az A faktor szintjei között (ez a nullhipotézis), akkor az ANOVA-táblázatban a faktor hatására vonatkozó $S_A = \sum_i p_i\left(y_{i\cdot} - y_{\cdot\cdot}\right)^2$ négyzetösszeg is $\chi^2\sigma_e^2$ eloszlású lesz. Várható értéke ilyenkor $E\left(S_A\right) = \nu_A\sigma_e^2 = (r-1)\sigma_e^2$.

[1] A dokumentumban lévő fejezetszámok és egyenletszámok a *Kemény S., Deák A., Lakné Komka K., Kunovszki P.: Kísérletek tervezése és értékelése (Typotex Kiadó, 2017*) könyv fejezeteire és egyenleteire utalnak.

A 9.3. alfejezetben azt is megmutattuk, hogy általánosságban (tehát a nullhipotézis igazságától függetlenül) az S_A négyzetösszeg várható értéke

$$E(S_A) = \nu_A \sigma_e^2 + \sum_i p_i \alpha_i^2 . \tag{15.2}$$

Amennyiben a nullhipotézis nem igaz, tehát az A faktornak van hatása, az S_A négyzetösszeg ún. nem-centrális χ^2-eloszlást követ, és várható értéke $\nu_A \sigma_e^2$ helyett $E(S_A) = (\nu_A + \phi^2)\sigma_e^2$, ahol ϕ^2 az eloszlás másik paramétere, amely a centralitástól való eltérést méri. Ez a ϕ^2 paraméter a (9.31) egyenlet felhasználásával így fejezhető ki:

$$\phi^2 = \frac{\sum_i p_i \alpha_i^2}{\sigma_e^2} \text{ (általánosságban).} \tag{15.3}$$

Ha az egyes i szinteken az ismétlések p_i száma azonos,

$$\phi^2 = \frac{p \sum_i \alpha_i^2}{\sigma_e^2} \text{ (kiegyensúlyozott tervre).} \tag{15.4}$$

Ha a nullhipotézis nem igaz (nem mindegyik α_i hatás zérus), az s_A^2 / s_R^2 arány nem F-eloszlású, hanem ún. nem-centrális F-eloszlást követ: $F^{nc}(\nu_1, \nu_2, \phi^2)$.

Ennek a nem-centrális F-eloszlásnak három paramétere van: ν_1 és ν_2 az s_A^2 ill. s_R^2 szórásnégyzetek szabadsági fokai, ϕ^2 az eloszlás harmadik paramétere (noncentrality parameter).

A nem-centrális F-eloszlás eloszlásfüggvényének értékeit a mai statisztikai programok kiszámítják, tehát megadják a másodfajú hiba valószínűségét:

$$\beta = P(F_0 < F_\alpha | \mathrm{H}_1) = P(F^{nc}(\nu_1, \nu_2, \phi^2) < F_\alpha) \tag{15.5}$$

15-1. példa

Legyen megint a faktor négyszintes (r = 4), az ismétlések száma p = 3, az elsőfajú hiba megengedett valószínűsége α = 0.05. Az F-próbánál a számláló szabadsági foka ν_1 = 3, a nevezőé ν_2 = 8, a táblázatban ehhez α = 0.05-os szignifikanciaszinten a kritikus F-érték 4.07.

Kérdezzük azt, hogy adott p ismétlésszám esetén mekkora hatást tudunk kimutatni 90% biztonsággal, vagyis a másodfajú hiba megengedett valószínűsége β = 0.1.

Tegyük föl pontosabban a kérdést úgy, hogy ha $\alpha_1 = \frac{\Delta}{2}\sigma_e$, $\alpha_2 = -\frac{\Delta}{2}\sigma_e$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, tehát az A faktor 1. és 2. szintjén az y várható értékében a különbség a σ_e kísérleti bizonytalanság Δ-szorosa, vagy másképpen

$$\mu_1 = \mu + \frac{\Delta}{2}\sigma_e; \quad \mu_2 = \mu - \frac{\Delta}{2}\sigma_e; \quad \mu_3 = \mu_4 = \mu ,$$

akkor mekkora a Δ érték?

Ezek a Δ értékek olvashatók ki a Függelék I. táblázatából. $r = 4$ és $p = 3$ paraméterekhez a táblázatos érték 3.941. Tehát $\alpha_1 = 2\sigma_e$, $\alpha_2 = -2\sigma_e$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, vagyis az A faktor 1. és 2. szintjén az y várható értékében a különbség a σ_e kísérleti bizonytalanság négyszerese kell legyen ahhoz, hogy 90%-os biztonsággal ki tudjuk mutatni.

Az általánosabb, a Függelék II. táblázat felhasználásával a következőképpen járhatunk el. Alkalmazzuk a 9.4. pontban megismert (9.34) jelölést:

$$\Phi(A) = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{r-1}$$

Ez a $\Phi(A)$ mutatja az α_i hatások szórásnégyzetszerű eltérését zérustól.

A nem-centrális F-eloszlás paramétere:

$$\phi^2 = \frac{p\sum \alpha_i^2}{\sigma_e^2} = \frac{p(r-1)\Phi(A)}{\sigma_e^2}. \qquad (15.6)$$

Így azt kérdezhetjük, hogy mekkora $\Phi(A)$ mutatható ki az adott kísérleti elrendezéssel.

Az F-próbában a számláló szabadsági foka $r-1$, a nevezőé $r(p-1)$. A Függelék II. táblázatában $\sqrt{C\frac{\Phi(\text{hatás})}{EMS(\text{nevező})}}$ értékek vannak $\alpha = 0.05$ és $\beta = 0.1$ hiba-valószínűségekhez. A négyzetgyökös kifejezést a későbbiekben használjuk és definiáljuk általános esetre, itteni értelme $\sqrt{p\Phi(A)/\sigma_e^2}$.

A példabeli $r = 4$ és $p = 3$ esetre a számláló szabadsági foka 3, a nevezőé $4 \cdot 2 = 8$, a táblázatból kiolvasott érték 2.805. A kimutatható szórásarány, $\sqrt{\Phi(A)/\sigma_e^2}$ ebből úgy adódik, hogy a táblázatos értéket elosztjuk a $p = 3$ ismétlésszám négyzetgyökével. Az eredmény: 1.619, vagyis

$$\sqrt{\frac{\sum \alpha_i^2}{(r-1)}} = 1.619\sigma_e$$

Tehát a hatások szórásszerű nagysága 1.6-szerese kell legyen σ_e-nek ahhoz, hogy 90% biztonsággal kimutassuk.

Másképpen:

$$\Phi(A) = \sqrt{\frac{\sum \alpha_i^2}{(r-1)}} = 1.619^2\sigma_e^2 \approx 2.6\sigma_e^2$$

vagyis $\Phi(A)$ az ismétlések σ_e^2 varianciájának 2.6-szerese kell legyen.

Fejezzük ki $\Phi(A)$-t a keresett Δ szorzókkal:

$$\Phi(A) = \frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(-\frac{\Delta}{2}\right)^2 \sigma_e^2}{4-1} = 2.6\sigma_e^2$$

Ebből $\Delta = 3.95 \approx 4$.

Általánosan a két szint között kimutatható legkisebb különbség képlete:

$$\delta = \Delta\sigma_e = \sqrt{2(r-1)\Phi(A)},$$

ami úgy értendő, hogy ha a faktornak csak két szintje között van δ nagyságú különbség, azt $1-\beta$ valószínűséggel tudjuk kimutatni az adott tervből.

Ha a faktor hatása ugyan nem zérus (ahogy a nullhipotézis állítja), de ennél az aránynál kisebb a hatás „szórásnégyzete”, elég nagy (> 0.1) a valószínűsége annak, hogy ne vegyük észre, és elfogadjuk a H_0: $\alpha_i = 0,\ i = 1,\ldots,r$ nullhipotézist.

A számítások (σ_e^2 ismeretét feltételezve) már a kísérletek végrehajtása előtt elvégezhetők, tehát megtudhatjuk, hogy az elképzelt kísérletsorozat adott biztonsággal mekkora hatásokat képes kimutatni. Amennyiben ezzel nem vagyunk elégedettek, meg kell változtatnunk a kísérleti tervet. Egyetlen faktor esetén vagy a faktorszintek, vagy az ismétlések számát növelhetjük.

15.2.2. Két rögzített faktor szerinti keresztosztályozás

A két faktor szerinti keresztosztályozásnál hasonlóan számíthatjuk ki a másodfajú hiba valószínűségét adott ellenhipotézishez, ahogy azt az egy faktor szerinti osztályozásnál tettük. Vegyük példaképpen az *A* faktor hatása vizsgálatának másodfajú hibáját, a többi (*B*, *AB*) hatásokra az eljárás analóg.

A 12.1. pontban láttuk, hogy ha a H_0^A: $\alpha_i = 0,\ i = 1,\ldots,r$ nullhipotézis igaz, vagyis ha az *A* faktornak nincs hatása, az $S_A = qp\sum_i (y_{i..} - y_{...})^2$ négyzetösszeg $\chi^2\sigma_e^2$ eloszlású, $\nu = r - 1$ szabadsági fokkal. Ekkor az S_A négyzetösszeg várható értéke $\nu_A\sigma_e^2$, ahol ν_A az S_A négyzetösszeg szabadsági foka ($\nu_A = r-1$), tehát $E(S_A) = (r-1)\sigma_e^2$.

Amennyiben H_0^A nem igaz, tehát az *A* faktornak igenis van hatása, az S_A négyzetösszeg nem-centrális $\chi^2\sigma_e^2$ eloszlású, várható értéke nem $\nu_A\sigma_e^2$, hanem $(\nu_A + \phi^2)\sigma_e^2$.

A ϕ^2 paraméter kifejezését megkapjuk, ha (12.22)-ből figyelembe vesszük, hogy

$$E(S_A) = (r-1)\sigma_e^2 + qp\sum_i \alpha_i^2 = (r-1)\sigma_e^2 + (r-1)qp\Phi(A), \tag{15.7}$$

amelyből $$\phi^2 = \frac{qp\sum_i \alpha_i^2}{\sigma_e^2} = \frac{(r-1)qp\Phi(A)}{\sigma_e^2}. \tag{15.8}$$

Az F_0 próbastatisztika, azaz az s_A^2 / s_R^2 arány nem *F*-eloszlású, hanem ún. nem-centrális *F*-eloszlást követ: $F^{nc}(\nu_1, \nu_2, \phi^2)$. Ha a másodfajú hiba β valószínűségét akarjuk kiszámítani, ezt a ϕ^2 értéket kell behelyettesítenünk a következő összefüggésbe:

$$\beta = P(F_0 < F_\alpha | H_1) = P(F^{nc}(\nu_1, \nu_2, \phi^2) < F_\alpha), \tag{15.9}$$

15-2. példa

Legyen az A faktor szintjeinek száma $r = 5$, a B faktoré $q = 3$, és legyen minden beállításnál $p = 3$ ismételt kísérletünk.

Mekkora a másodfajú hiba elkövetésének β valószínűsége, ha az A faktor egyes szintjein a hatás rendre 0.75, 0.75, 0, 0, 0 és $\sigma_e^2 = 0.4$?

$$\sqrt{\sum \alpha_i^2 \Big/ \left[(r-1)\sigma_e^2\right]} = \sqrt{\frac{0.75^2 + 0.75^2}{(5-1)\cdot 0.4}} = 0.7$$

Először ki kell számítanunk a paraméterek értékét:

$$\phi^2 = \frac{qp\sum \alpha_i^2}{\sigma_e^2} = (r-1)qp\frac{\Phi(A)}{\sigma_e^2} = 4\cdot 3\cdot 3\cdot 0.7^2 = 17.64;$$

Az F-próba 0.05-os szignifikanciaszinthez tartozó kritikus értéke $F_{0.05}(4{,}30) = 2.69$

Másodfajú hibát akkor követünk el, ha az F_0 próbastatisztika kiszámított értéke ezt a határt nem haladja meg, pedig a H_0^A: $\alpha_i = 0,\ i = 1,\ldots,r$ nullhipotézis nem igaz.

$$\beta = P(F_0 < F_\alpha | H_1) = P\left(F^{nc}(\nu_1, \nu_2, \phi^2) < F_\alpha\right) = P\left(F^{nc}(4{,}30{,}17.64) < 2.69\right) = 0.11$$

Vagyis 0.11 a valószínűsége annak (kb. minden tizedik esetben előfordulhat), hogy nem vesszük észre az A faktor szintjei közötti különbség hatását, ha a hatások a feltételezett nagyságúak.

A kérdés a gyakorlatban inkább úgy merül föl, hogy azt szeretnénk tudni, az adott kísérleti tervvel (r, q, p) mekkora hatás mutatható ki adott $1 - \beta$ (pl. 90%) biztonsággal. Ha ezzel nem vagyunk elégedettek (kisebb hatásokat is ki szeretnénk mutatni), meg kell változtatni a kísérleti tervet.

A Függelék II. táblázatából, melyet Lorenzen és Anderson (1993) könyve nyomán, az itt vázolt algoritmus szerint készítettünk (Baharev és Kemény, 2008), olvashatjuk ki a $\sqrt{qp\sum \alpha_i^2 \Big/ \left[(r-1)\sigma_e^2\right]} = \sqrt{qp\Phi(A)}\Big/\sigma_e$ értékeket az $F_0 = s_A^2 \big/ s_R^2$ próbastatisztika szabadsági fokainak függvényében. A Függelék II. táblázatban hivatkozott C értéke itt qp. Ha a $\sqrt{\Phi(A)/\sigma_e^2} = \sqrt{\sum \alpha_i^2 \Big/ \left[(r-1)\sigma_e^2\right]}$ szórás jellegű mennyiséget akarjuk kiszámítani, a táblázatból kiolvasott értéket még el kell osztani $\sqrt{qp}$ -vel.

15-3. példa

Legyen az A faktor szintjeinek száma $r = 5$, a B faktoré $q = 3$, és legyen minden beállításnál $p = 3$ ismételt kísérletünk, ugyanúgy, mint a 15-2. példában. Legyen adott az elsőfajú hiba $\alpha = 0.05$ és a másodfajú hiba $\beta = 0.1$ megengedett valószínűsége. Kérdezzük, hogy az A faktorra mekkora az a hatás, ami ezzel a tervvel már kimutatható.

Példánkban a számláló szabadsági foka $r - 1 = 4$, a nevezőé $rq(p - 1) = 30$. A táblázatból kiolvasott érték 2.124, ezt kell osztani $\sqrt{qp} = \sqrt{3\cdot 3} = 3$-mal, így 0.7 adódik.

Tehát a $\sqrt{\sum \alpha_i^2 / \left[(r-1)\sigma_e^2\right]}$ szórás jellegű mennyiség az A faktor kimutatható hatására 0.7.

15.2.3 A kimutatható eltérés nagysága az általános terv rögzített hatásaira

Az összehasonlítás általános esetben a következő:

$$F_0 = \frac{s^2_{\text{számláló}}}{s^2_{\text{nevező}}}. \tag{15.10}$$

A kérdéses faktor ugyan rögzített, de a terv tartalmazhat véletlen faktorokat is, és ezeket is használjuk az összehasonlításban.

Vegyük példaként az A rögzített faktor hatásának kimutatását olyan kétfaktoros keresztosztályozási tervben, amelyben A rögzített, B véletlen faktor. A számláló és a nevező várható értéke éppen a kérdéses hatásban különbözik:

$$E\left(s^2_{\text{számláló}}\right) = pq\Phi(A) + p\sigma^2_{AB} + \sigma^2_e, \tag{15.11}$$

$$E\left(s^2_{\text{nevező}}\right) = p\sigma^2_{AB} + \sigma^2_e. \tag{15.12}$$

A számláló szabadsági foka a példában $r-1$, a nevezőé $(r-1)(q-1)$.
Ha a hatás nem létezik [$\Phi(A)=0$], a számláló és a nevező várható értéke egyaránt $p\sigma^2_{AB} + \sigma^2_e$.
Általában egy rögzített hatásra

$$E\left(s^2_{\text{számláló}}\right) - E\left(s^2_{\text{nevező}}\right) = C\Phi(\text{hatás}), \tag{15.13}$$

ahol C a számlálóbeli szórásnégyzet várható értékének kifejezésében $\Phi(\text{hatás})$ együtthatója. A vizsgált példában $C = pq$.

A Függelék II. táblázata tartalmazza rögzített hatásokra a $\sqrt{C\Phi(\text{hatás})/E\left(s^2_{\text{nevező}}\right)}$ értékeket a számláló és a nevező szabadsági foka függvényében.

15-4. példa

15-1. táblázat

Hatás	Szórásnégyzet	Szab. fok	A szórásnégyzet várható értéke
A_i	s^2_A	1	$24\Phi(A) + 6\sigma^2_{AB} + 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
B_j	s^2_B	3	$12\sigma^2_B + 6\sigma^2_{AB} + 4\sigma^2_{BC} + 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
AB_{ij}	s^2_{AB}	3	$6\sigma^2_{AB} + 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
C_k	s^2_C	2	$16\Phi(C) + 4\sigma^2_{BC} + 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
AC_{ik}	s^2_{AC}	2	$8\Phi(AC) + 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
BC_{jk}	s^2_{BC}	6	$4\sigma^2_{BC} + 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
ABC_{ijk}	s^2_{ABC}	6	$2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$
$\varepsilon_{l(ijk)}$	s^2_R	24	σ^2_e

Számítsuk ki, hogy a 15-1. táblázatbeli A rögzített faktornál mekkora a kimutatható eltérés nagysága a szokásos $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ hiba-valószínűségekkel!
A kérdéses összehasonlítás:

$$F_0 = \frac{s_A^2}{s_{AB}^2},$$

ahol a számláló várható értéke $24\Phi(A) + 6\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$, a nevezőé $6\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$.
A példában $r = 2$, tehát $\nu_{\text{számláló}} = r - 1 = 1$, és $q = 4$, tehát $\nu_{\text{nevező}} = (r-1)(q-1) = 3$. A Függelék II. táblázatából kiolvasott érték 5.014, ez osztandó $\sqrt{C} = \sqrt{24}$-gyel, mert a számlálóbeli szórásnégyzet várható értékében 24 a $\Phi(A)$ együtthatója: $\frac{5.014}{\sqrt{24}} = 1.023$, négyzete 1.047. Vagyis az A faktor okozta hatás „szórásnégyzetének” legalább akkorának (pontosabban 1.047-ször akkorának) kell lennie, mint $p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$, hogy 90% biztonsággal észleljük, és ne higgyük zérusnak. A fejezet bevezetőjében mutatott 15-2. táblázat szerint 1.023 a kis kimutatható hatások csoportjába tartozik. Ez csak globális megítélés, ha általánosabban akarjuk jellemezni a tervet. Hogy a kísérletező céljainak megfelel-e, viszonyítani kell a szakmailag releváns kimutatandó eltéréshez.

15-2. táblázat

$\Delta = \sqrt{\Phi(\text{hatás})/E(s_{\text{nevező}}^2)}$	kimutathatóság
0.5 alatt	nagyon kis hatások
0.5 és 1.5 között	kis hatások
1.5 és 3.0 között	közepes hatások
3 és 5 között	nagy hatások
5 fölött	nagyon nagy hatások

15.3. A másodfajú hiba valószínűsége, a kimutatható eltérés nagysága véletlen hatásokra

15.3.1. Egy véletlen faktor szerinti osztályozás

13-2. táblázat

Az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szab. fok	szórásnégyzet	a szórásnégyzet várható értéke	F_0
A hatása (csoportok közötti)	$S_A = p\sum_i (y_{i\cdot} - y_{\cdot\cdot})^2$	$r-1$	$s_A^2 = \frac{S_A}{r-1}$	$\sigma_e^2 + p\sigma_A^2$	$\frac{s_A^2}{s_R^2}$
Ismétlések (csoportokon belüli)	$S_R = \sum_i \sum_j (y_{ij} - y_{i\cdot})^2$	$r(p-1)$	$s_R^2 = \frac{S_R}{r(p-1)}$	σ_e^2	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - y_{\cdot\cdot})^2$	$rp-1$			

Az s_A^2 szórásnégyzet várható értéke a 13-2. táblázat szerint $p\sigma_A^2 + \sigma_e^2$, az s_R^2 szórásnégyzeté σ_e^2, tehát az s_A^2 / s_R^2 hányados (az F_0 próbastatisztika) eloszlása (13.12) átrendezésével általános esetben $F \dfrac{p\sigma_A^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}$.

A másodfajú hiba valószínűsége:

$$\beta = P\left(F_0 < F_\alpha \middle| H_1\right) = P\left(F \frac{p\sigma_A^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2} < F_\alpha \right). \tag{15.14}$$

15-5. példa

13-1. példa

Egy elemzést három napon naponta kétszer végeztek el. Az eredményeket (y_{ij}) a 13-1. táblázat tartalmazza.
13-1. táblázat

	1. nap	2. nap	3. nap	
	96.897 96.963	96.905 97.567	97.495 97.195	
$y_{i.}$	96.930	97.236	97.345	$y_{..}$=97.1705

Vizsgáljuk meg, hogy ha a 13-1. példában (3 nap, két-két ismétlés) a napok közötti eltérés varianciája az ismétlési hiba varianciájának 9-szerese ($\sigma_A / \sigma_e = 3$), mekkora a valószínűsége annak, hogy a napok hatását nem találjuk szignifikánsnak, vagyis mekkora a másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége. Az elsőfajú hiba megengedett valószínűsége 0.05 volt.

A számláló szabadsági foka $\nu_1 = 2$, a nevezőé $\nu_2 = 3$, a 0.05-os szignifikanciaszinthez tartozó kritikus F érték 9.55, az ismétlések száma $p = 2$.

$$\beta = P\left(F \frac{2\sigma_A^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2} < 9.55 \right) = P\left(F < 9.55 \frac{1}{2 \cdot 9 + 1} \right) = P\left(F < 0.5026\right) = 0.352$$

Tehát amennyiben a napok okozta ingadozás varianciája 9-szerese az ismétlési ingadozás varianciájának, 100 eset közül 35-ször azt fogjuk találni, hogy a napoknak nincs ingadozásnövelő hatása.

15-6. példa

Az előző példában (a számláló szabadsági foka $\nu_1 = 2$, a nevezőé $\nu_2 = 3$, a 0.05-os szignifikanciaszinthez tartozó kritikus F érték 9.55, az ismétlések száma $p = 2$) a napok közötti eltérés varianciája az ismétlési hiba varianciájának hányszorosa kell legyen ahhoz, hogy 90% biztonsággal kimutassuk (vagyis hogy a másodfajú hiba valószínűsége 0.1 legyen)?
A másodfajú hiba valószínűségének kifejezése:

$$\beta = P\left(F\frac{2\sigma_A^2+\sigma_e^2}{\sigma_e^2} < 9.55 \right) = P\left(F < 9.55\frac{\sigma_e^2}{2\sigma_A^2+\sigma_e^2} \right) = 0.1 .$$

A Statistica programmal számolva a $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$ szabadsági fokú F-eloszlású valószínűségi változónak az az értéke, amelyet 0.1 valószínűséggel halad meg lefelé, 0.10915. Ennek felhasználva, a

$$0.10915 = 9.55\frac{\sigma_e^2}{2\sigma_A^2+\sigma_e^2}$$

egyenletből $\sigma_A^2/\sigma_e^2 = 43.2$, $\sigma_A/\sigma_e = 6.57$.

Ez azt jelenti, hogy az A faktornak (a napoknak) tulajdonítható ingadozásnak 6.57-szorosan meg kell haladnia a csoportokon belüli ingadozás szigmáját ahhoz, hogy 90% biztonsággal kimutassuk.

A Függelék III. táblázatában adjuk meg az $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ hiba-valószínűségekhez tartozó kiszámított σ arányokat, ahogy Lorenzen és Anderson (1993) nyomán, az itt vázolt algoritmussal kiszámoltuk. Az egy véletlen faktor szerinti osztályozásnál a táblázatot úgy kell használni, hogy a számláló szabadsági fokához (r – 1) és a nevező szabadsági fokához [$r(p$ – 1)] kiolvasott számot elosztjuk $\sqrt{p}$ -vel, ez adja a kimutatható σ_A/σ_e arányt. A $\sqrt{p}$ a megfelelő szórásnégyzet várható értékének kifejezésében σ_A^2 együtthatójának négyzetgyöke.

15.3.2. Két véletlen faktor szerinti keresztosztályozás

Amikor az A faktor hatásának kimutatásáról van szó, az F_0 próbastatisztikához a számláló várható értéke $qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$, a nevezőé $p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$. A számlálóban lévő szórásnégyzet szabadsági foka r – 1, a nevezőben lévőé (r – 1)(q – 1). A másodfajú hiba valószínűsége:

$$\beta = P(F_0 < F_\alpha | H_1) = P\left(F\frac{qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} < F_\alpha \right) =$$

$$= P\left(F < F_\alpha \frac{p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} \right). \qquad (15.15)$$

15-7. példa

Egy elemzést nemcsak különböző napokon végeztek el, hanem különböző személyek is. Úgy képzeljük el a helyzetet, hogy a napok ill. a személyek sokaságából választunk szinteket az adott kísérletsorozathoz, tehát a nap is, a személy is véletlen faktor. Minden kombinációban azonos p számú ismétlést végzünk. Az eredményeket a 13-6. táblázat mutatja.

13-6. táblázat

	1. nap	2. nap	3. nap	$y_{\cdot j \cdot}$
1. személy	96.897 96.963	96.905 97.567	97.495 97.195	97.170
2. személy	97.232 97.184	97.241 97.025	97.215 97.581	97.247
3. személy	96.988 96.797	97.202 97.324	97.352 97.283	97.158
4. személy	97.035 97.095	97.339 97.318	97.388 97.168	97.224
$y_{i\cdot\cdot}$	97.024	97.240	97.335	$y_{\cdots}$=97.200

A példához tartozó ANOVA táblázat:

Eltérés forrása	Eltérés-négyzetösszeg	Szab. fok	Szórás-négyzet	Szórásnégyzet várható értéke	F_0
A	$S_A = qp\sum_i \left(y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdots}\right)^2$	$r-1$	$s_A^2 = \frac{S_A}{r-1}$	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_A^2 / s_{AB}^2
B	$S_B = rp\sum_j \left(y_{\cdot j\cdot} - y_{\cdots}\right)^2$	$q-1$	$s_B^2 = \frac{S_B}{q-1}$	$rp\sigma_B^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_B^2 / s_{AB}^2
AB	$S_{AB} =$ $= p\sum_i \sum_j \left(y_{ij\cdot} - y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot j\cdot} + y_{\cdots}\right)^2$	$(r-1)$ $(q-1)$	$s_{AB}^2 =$ $= \frac{S_{AB}}{(r-1)(q-1)}$	$p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_{AB}^2 / s_R^2
Ism.	$S_R = \sum_i \sum_j \sum_k \left(y_{ijk} - y_{ij\cdot}\right)^2$	$rq(p-1)$	$s_R^2 = \frac{S_R}{rq(p-1)}$	σ_e^2	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j \sum_k \left(y_{ijk} - y_{\cdots}\right)^2$	$rqp-1$			

A 13-4. példában az A faktor (napok) hatásának vizsgálatakor a számláló szabadsági foka $\nu_1 = 2$, a nevezőé $\nu_2 = 6$, a kritikus F-érték $\alpha = 0.05$ megengedett elsőfajú hiba-valószínűséghez 5.14.

Mekkora a másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége, ha a napok közötti eltérés varianciája az ismétlési hiba varianciájának 9-szerese ($\sigma_A / \sigma_e = 3$), és nincs kölcsönhatás a napok és személyek között ($\sigma_{AB}^2 = 0$)?

$$\beta = P\left(F < F_\alpha \frac{p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} \right) = P\left(F < 5.14 \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 9 + 1} \right) = P(F < 0.0704) = 0.067$$

Tehát ha a 13-4. példa szerinti tervet hajtjuk végre (3 nap, 4 személy, 2 ismétlés), csak kb. 7% eséllyel mulasztjuk el észrevenni, hogy a napok között ekkora különbség van.

15-8. példa

Mekkora kell legyen az előző példában a σ_A/σ_e arány (továbbra is $\sigma_{AB}^2 = 0$ mellett), hogy azt 90% valószínűséggel észrevegyük?

Az F-eloszlás 0.1 valószínűséghez tartozó értéke ($\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 6$) a statisztikai programmal számolva 0.1072. Az

$$5.14 \cdot \frac{2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{8\sigma_A^2 + 2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} = 0.1072$$

egyenletből

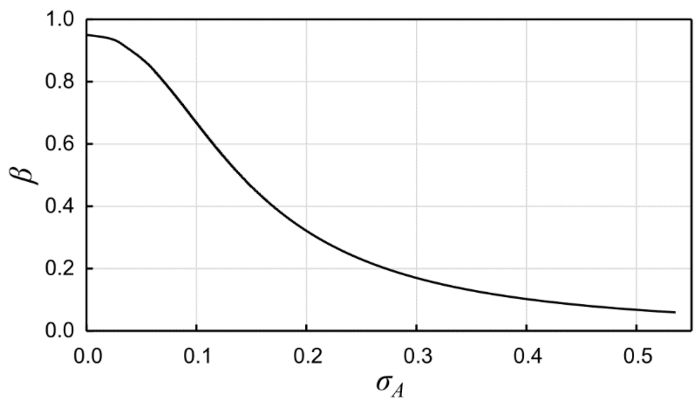
$$\frac{\sigma_A^2}{2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} = 5.868, \quad \frac{\sigma_A}{\sqrt{2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}} = 2.422.$$

Ha $\sigma_{AB}^2 = 0$, akkor a 90% biztonsággal kimutatható arány $\sigma_A/\sigma_e = 2.422$.

Amennyiben σ_e^2-re a példabeli 0.028-et vesszük, σ_A-ra 90%-os biztonságú kimutatási határként 0.39 adódik. Ez nem azt jelenti, hogy kisebb σ_A ingadozást nem veszünk észre, csak 10%-nál nagyobb a valószínűsége, hogy egy kísérletben s_A^2 akkorának adódik, hogy nem vesszük észre. A 15-1. ábra a másodfajú hiba valószínűségét mutatja különböző σ_A értékekhez.

A Függelék III. táblázatából a $\dfrac{\sigma_A^2}{p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}$ arány négyzetgyökét úgy kaphatjuk meg, hogy a számláló szabadsági fokához ($r - 1$, itt 2) és a nevező szabadsági fokához [$(r - 1)(q - 1)$, itt 6] kiolvasott számot elosztjuk (itt 6.853) $\sqrt{qp}$ -vel (itt $\sqrt{8}$ -cal). A $\sqrt{qp}$ a megfelelő szórásnégyzet várható értékének kifejezésében σ_A^2 együtthatójának négyzetgyöke.

Ugyanez a számítási mód érvényes minden véletlen hatásra, vagyis a rögzített és véletlen faktorok közötti kölcsönhatásokra is.



15-1. ábra. A másodfajú hiba valószínűsége a 15-8. példában

15-9. példa

A 3 nap*4 személy*2 ismétlés tervvel ($\sigma_{AB}^2 = 0$ feltételezéssel) a 90% biztonsággal kimutatható arány $\sigma_A/\sigma_e = 2.422$. Hány ismétlésre van szükség az egyetlen személy által 3 napon végzett méréseknél, hogy a napok közötti ugyanekkora eltérést ugyancsak 90% biztonsággal kimutassunk?

A Függelék III. táblázatában egy véletlen faktor szerinti osztályozás esetén a $\sqrt{p\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2}}$ értékek vannak. Itt tudjuk a varianciák arányát, de *p* a kérdésben is szerepel, tehát próbálgatnunk kell. Ha *p* = 7-et veszünk, $\sqrt{p\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2}} = 6.408$ -nak adódik, ott a táblázatos érték 6.580, *p* = 8-ra a számított kifejezés 6.850, a táblázatbeli 6.385.

Tehát 7 és 8 közötti számú ismétlésre van szükség ehhez a statisztikai biztonsághoz, ha csak egyetlen személy mér 3 napon, vagyis 21-24 mérés kell összesen. Láttuk, hogy 4 személy 3 napon át 2 ismétléssel végezte mérésénél, tehát összesen 24 mérésnél (gyakorlatilag ugyanekkora tervnél) ugyanekkora a statisztikai biztonság, csak utóbbi esetben a napok és a személyek hatásáról is képet kapunk. Ha egyetlen személy mér 3 napon 8 ismétléssel, csak a napok hatásáról szerezhetünk tudomást.

15-10. példa

14.1. példa

Egy gyógyszergyárban a gyártott tablettákból tételenként háromszor vesznek mintát: a tétel gyártásának elején, közepén és végén. Mindegyik minta hatóanyag-tartalmát (a tabletták elporítása és homogenizálása után) kémiai analízissel határozzák meg, 3 ismétléssel. Itt a tétel az egyik faktor, a minta a másik faktor, és három ismétlés van. A három-három minta egy-egy tételhez tartozik, nem lehet ugyanazokat a mintákat egy másik tételből kivenni.

14.1. táblázat

Tétel	Minta	mg	Tétel	Minta	mg	Tétel	Minta	mg
1	eleje	2.60	2	eleje	2.58	3	eleje	2.55
1	eleje	2.59	2	eleje	2.57	3	eleje	2.56
1	eleje	2.60	2	eleje	2.56	3	eleje	2.58
1	közepe	2.62	2	közepe	2.58	3	közepe	2.56
1	közepe	2.60	2	közepe	2.58	3	közepe	2.60
1	közepe	2.62	2	közepe	2.58	3	közepe	2.57
1	vége	2.57	2	vége	2.59	3	vége	2.57
1	vége	2.57	2	vége	2.59	3	vége	2.56
1	vége	2.58	2	vége	2.57	3	vége	2.57

A feladathoz tartozó ANOVA táblázat:
14.2. táblázat

Eltérés forrása	Eltérés-négyzetösszeg	Szab. fok	Szórásnégyzet	Szórásnégyzet várható értéke	F_0
A	$S_A = qp\sum_i \left(y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot}\right)^2$	$r-1$	$s_A^2 = \dfrac{S_A}{r-1}$	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_B^2 + \sigma_e^2$	$\dfrac{s_A^2}{s_{B(A)}^2}$
$B(A)$	$S_{B(A)} = p\sum_i \sum_j \left(y_{ij\cdot} - y_{i\cdot\cdot}\right)^2$	$r(q-1)$	$s_{B(A)}^2 = \dfrac{S_{B(A)}}{r(q-1)}$	$p\sigma_B^2 + \sigma_e^2$	$\dfrac{s_{B(A)}^2}{s_R^2}$
Ism.	$S_R = \sum_i \sum_j \sum_k \left(y_{ijk} - y_{ij\cdot}\right)^2$	$rq(p-1)$	$s_R^2 = \dfrac{S_R}{rq(p-1)}$	σ_e^2	

A 14-1. példában nem találtuk szignifikánsnak a tételek közötti különbséget, tehát azt kellene mondanunk, hogy $\sigma_A^2 = \sigma_{\text{tétel}}^2 = 0$. Ha azonban ezzel nem törődve becslést adunk a tételek hatóanyag-tartalma ingadozásának varianciájára, a többi varianciához hasonló nagyságú értéket kapunk. Fölmerül tehát a kérdés, hogy az adott tervvel mekkora $\sigma_{\text{tétel}}^2$ varianciát tudnánk már kimutatni (pl. 90%-os biztonsággal).

A próbastatisztika, amellyel döntünk a nullhipotézisről $F_0 = s_A^2 / s_{B(A)}^2$. A számláló szabadsági foka 2, a nevezőé 6, $\sqrt{qp} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3$. A Függelék III. táblázatából kiolvasott érték 6.853, tehát a két variancia arányának minimális értéke $\dfrac{\sigma_A^2}{p\sigma_{B(A)}^2 + \sigma_e^2} = \dfrac{6.853^2}{9} = 5.218$ kell legyen, hogy 90% valószínűséggel kimutassuk. Ha a nevező helyett annak $s_{B(A)}^2 = 5 \cdot 10^{-4}$ becslését vesszük, a $\sigma_A^2 = \sigma_{\text{tétel}}^2$ minimális szükséges nagysága $5.218 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 2.61 \cdot 10^{-3}$.

15.3.3. A kimutatható eltérés nagysága az általános terv véletlen hatásaira

Kizárólag véletlen faktorokat tartalmazó tervben a faktorok hatása, vagy vegyes tervben a véletlen faktorok hatása kimutathatóságának vizsgálatához is a Függelék III. táblázatát használjuk.

15-11. példa

Számítsuk ki, hogy a 15-1. táblázatbeli B véletlen faktornál mekkora a kimutatható eltérés nagysága a szokásos $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ hiba-valószínűségekkel!

A kérdéses összehasonlítás:

$$F_0 = \frac{s_B^2}{s_R^2}.$$

A B faktor szintjeinek száma q = 4, tehát $\nu_{\text{számláló}} = q - 1 = 3$. Az ismétlések száma p = 2, a másik két faktor szintjeinek száma r = 2, t = 3, tehát

$$\nu_{\text{nevező}} = rqt(p-1) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24\,.$$

A Függelék III. táblázatából kiolvasott érték 3.818, ez osztandó $\sqrt{C} = \sqrt{12}$-vel (mert a számlálóban szereplő szórásnégyzet várható értékének kifejezésében a σ_B^2 együtthatója 12): $3.818/\sqrt{12} = 1.102$, négyzete 1.214. Vagyis a σ_B^2-nek 1.2-szeresen kell meghaladnia σ_e^2 nagyságát, hogy 90% biztonsággal észrevegyük (zérustól szignifikánsan különbözőnek minősítsük), amennyiben a többi variancia zérus. A 15-2. táblázat szerint 1.102 a kis kimutatható hatások csoportjába tartozik. Ez csak globális megítélés, ha általánosabban akarjuk jellemezni a tervet. Hogy a kísérletező céljainak megfelel-e, viszonyítani kell a szakmailag releváns kimutatandó eltéréshez.

I. táblázat.

$\Delta = \delta / \sigma_e$ értékei egy rögzített faktor szerinti osztályozáshoz, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$

A sorokban az ismétlések száma, az oszlopokban a faktor szintjeinek száma a paraméter

	2	3	4	5	6
2	6.785	6.535	6.381	6.318	6.303
3	3.554	3.809	3.941	4.042	4.127
4	2.724	2.977	3.120	3.226	3.315
5	2.303	2.534	2.669	2.770	2.853
6	2.036	2.247	2.373	2.468	2.545
7	1.846	2.041	2.159	2.247	2.320
8	1.702	1.884	1.994	2.078	2.146
9	1.494	1.655	1.754	1.830	1.891
10	1.348	1.494	1.585	1.654	1.710
12	1.238	1.372	1.457	1.520	1.573
14	1.151	1.276	1.355	1.415	1.464
16	1.081	1.198	1.273	1.329	1.375
18	1.022	1.133	1.203	1.257	1.301
20	0.971	1.077	1.144	1.195	1.237
22	0.928	1.029	1.093	1.142	1.182
24	0.890	0.987	1.049	1.096	1.134
26	0.856	0.949	1.009	1.054	1.091
28	0.826	0.916	0.973	1.017	1.053
30	0.712	0.789	0.839	0.877	0.908
40	0.578	0.642	0.682	0.713	0.738
60	0.500	0.554	0.589	0.616	0.638
80	0.446	0.495	0.526	0.550	0.570
100	0.315	0.349	0.371	0.388	0.402
500	0.199	0.220	0.234	0.245	0.254
1000	0.140	0.156	0.166	0.173	0.180

II. táblázat

$\sqrt{C\dfrac{\Phi(\text{hatás})}{EMS(\text{nevező})}}$ értékei több rögzített faktor szerinti osztályozáshoz,

$\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$

A sorokban a nevező szabadsági foka, az oszlopokban a számláló szabadsági foka a paraméter

	1	2	3	4	5	6	10	20	50
1	20.96	23.25	24.16	24.65	24.95	25.15	25.57	25.89	26.08
2	6.796	6.710	6.682	6.668	6.659	6.653	6.642	6.633	6.628
3	5.014	4.630	4.475	4.390	4.336	4.299	4.221	4.159	4.121
4	4.396	3.900	3.692	3.576	3.502	3.450	3.339	3.250	3.193
5	4.092	3.538	3.301	3.166	3.079	3.018	2.886	2.777	2.707
6	3.913	3.324	3.068	2.921	2.825	2.757	2.609	2.486	2.405
7	3.795	3.183	2.914	2.759	2.656	2.583	2.423	2.287	2.197
8	3.712	3.084	2.805	2.643	2.535	2.458	2.288	2.142	2.044
10	3.604	2.953	2.661	2.489	2.375	2.292	2.107	1.944	1.832
12	3.536	2.871	2.570	2.392	2.272	2.186	1.989	1.814	1.690
14	3.489	2.815	2.508	2.325	2.202	2.112	1.907	1.721	1.588
16	3.455	2.774	2.463	2.276	2.150	2.058	1.846	1.652	1.510
18	3.429	2.743	2.428	2.239	2.111	2.017	1.800	1.598	1.449
20	3.409	2.718	2.401	2.210	2.080	1.984	1.762	1.554	1.399
22	3.393	2.698	2.379	2.186	2.054	1.957	1.732	1.519	1.357
24	3.380	2.682	2.361	2.166	2.033	1.935	1.707	1.489	1.322
26	3.368	2.669	2.346	2.150	2.016	1.917	1.686	1.464	1.292
28	3.359	2.657	2.333	2.136	2.001	1.901	1.667	1.442	1.265
30	3.351	2.647	2.322	2.124	1.988	1.888	1.652	1.423	1.242
40	3.322	2.613	2.283	2.082	1.944	1.841	1.597	1.355	1.159
60	3.295	2.580	2.246	2.042	1.900	1.794	1.542	1.287	1.070
80	3.281	2.563	2.227	2.022	1.878	1.772	1.515	1.252	1.022
100	3.273	2.554	2.216	2.010	1.866	1.758	1.498	1.231	.9926
200	3.257	2.534	2.195	1.986	1.840	1.731	1.466	1.187	.9298
500	3.248	2.523	2.182	1.972	1.825	1.715	1.446	1.161	.8894
1000	3.245	2.519	2.178	1.967	1.820	1.709	1.439	1.152	.8754
∞	3.242	2.515	2.173	1.962	1.815	1.704	1.433	1.143	.8610

III. táblázat

$\sqrt{C\dfrac{\sigma^2_{\text{hatás}}}{EMS(\text{nevező})}}$ értékei egy vagy több véletlen faktor szerinti osztályozáshoz, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$

A sorokban a nevező szabadsági foka, az oszlopokban a számláló szabadsági foka a paraméter

	1	2	3	4	5	6	10	20	50
1	80.218	41.231	34.549	31.932	30.554	29.707	28.171	27.143	26.573
2	30.255	13.038	10.182	9.068	8.481	8.121	7.465	7.025	6.780
3	23.276	9.301	7.001	6.100	5.624	5.330	4.792	4.429	4.225
4	20.722	7.949	5.849	5.024	4.585	4.313	3.813	3.471	3.278
5	19.423	7.264	5.265	4.476	4.054	3.793	3.308	2.973	2.782
6	18.641	6.853	4.913	4.145	3.733	3.476	2.998	2.665	2.473
7	18.121	6.580	4.679	3.924	3.518	3.264	2.789	2.455	2.260
8	17.750	6.385	4.512	3.765	3.364	3.111	2.638	2.301	2.104
10	17.258	6.126	4.289	3.554	3.157	2.907	2.433	2.091	1.887
12	16.946	5.963	4.148	3.420	3.025	2.775	2.300	1.953	1.742
14	16.731	5.850	4.050	3.327	2.933	2.684	2.207	1.854	1.637
16	16.574	5.767	3.979	3.259	2.866	2.617	2.137	1.780	1.557
18	16.454	5.704	3.924	3.206	2.814	2.565	2.084	1.723	1.494
20	16.360	5.655	3.881	3.165	2.774	2.524	2.041	1.676	1.443
22	16.284	5.615	3.846	3.132	2.741	2.491	2.007	1.638	1.400
24	16.221	5.582	3.818	3.104	2.713	2.464	1.978	1.606	1.364
26	16.168	5.554	3.794	3.081	2.690	2.440	1.953	1.579	1.333
28	16.123	5.530	3.773	3.061	2.671	2.421	1.933	1.556	1.306
30	16.084	5.510	3.755	3.044	2.654	2.404	1.915	1.535	1.282
40	15.950	5.440	3.694	2.985	2.595	2.344	1.852	1.463	1.196
60	15.819	5.371	3.634	2.927	2.537	2.286	1.788	1.390	1.105
80	15.755	5.337	3.605	2.899	2.508	2.257	1.757	1.352	1.056
100	15.716	5.317	3.587	2.882	2.491	2.240	1.738	1.329	1.025
200	15.640	5.277	3.552	2.848	2.457	2.205	1.700	1.282	.960
500	15.595	5.253	3.531	2.828	2.437	2.185	1.677	1.254	.919
1000	15.580	5.246	3.524	2.821	2.431	2.178	1.670	1.244	.904